Ueber die

fremdartigen Lösungen der durch Division gebildeten Resultante zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

August Dickmann

aus Bottrop.

Marburg.

Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).

1880.

Herrn

Professor Dr. Edmund Hess

in

Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

vom

Verfasser.

Die Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten beruht bekanntlich auf Bildung einer Endgleichung, worin nur noch eine Unbekannte vorkommt. Nach der Sylvester'schen oder Bézout-Cayley'schen Methode lässt sich die Resultante ohne fremdartige Lösungen in Determinantenform hinschreiben. Bildet man dagegen die Resultante durch Division, so erhält sie fremdartige Lösungen, welche auszuscheiden sind. Der Satz von Labatie liefert ein allgemeines Verfahren, die fremdartigen Lösungen zu beseitigen. Die folgenden Untersuchungen bezwecken, die Anzahl und Beschaffenheit dieser fremdartigen Lösungen genau zu bestimmen. Durch die Vorlesung meines verehrten Lehrers, des Herrn Professors Hess »Ueber die Theorie der Gleichungen mit mehreren Unbekannten« wurde ich zu dieser Untersuchung angeregt.

Zuerst wollen wir nun diejenigen Gleichungen, deren Grad derselbe ist, betrachten, dann zwei Gleichungen von verschiedenem Grade.

I.

Untersuchung der Resultante zweier Gleichungen von gleich hohem Grade.

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vom $n$ten Grade haben folgende Form:

(1). $a_{n,0}\,x^n + (a_{n-1,1}\,x^{n-1}\,y + a_{n-1,0}\,x^{n-1}) +$
$(a_{n-2,2}\,x^{n-2}\,y^2 + a_{n-2,1}\,x^{n-2}\,y + a_{n-2,0}\,x^{n-2}) +$

$$(a_{n-3,3}\,x^{n-3}y^3 + a_{n-3,2}\,x^{n-3}y^2 + a_{n-3,1}\,x^{n-3}y + a_{n-3,0}\,x^{n-3}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$(a_{1,n-1}\,x\,.\,y^{n-1} + a_{1,n-2}\,x\,y^{n-2} + \ldots + a_{1,1}\,x\,.\,y + a_{1,0}\,x) +$$
$$(a_{0,n}\,y^n + a_{0,n-1}\,y^{n-1} + \ldots + a_{0,1}\,y + a_{0,0}) = 0.$$

(2). $b_{n,0}\,x^n + (b_{n-1,1}\,x^{n-1}y + b_{n-1,0}\,x^{n-1}) +$
$$(b_{n-2,2}\,x^{n-2}y^2 + b_{n-2,1}\,x^{n-2}y + b_{n-2,0}\,x^{n-2}) +$$
$$(b_{n-3,3}\,x^{n-3}y^3 + b_{n-3,2}\,x^{n-3}y^2 + b_{n-3,1}\,x^{n-3}y + b_{n-3,0}\,x^{n-3}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(b_{1,n-1}\,x\,.\,y^{n-1} + b_{1,n-2}\,x\,.\,y^{n-2} + \ldots + b_{1,1}\,x\,.\,y + b_{1,0}\,x) +$$
$$(b_{0,n}\,y^n + b_{0,n-1}\,y^{n-1} + \ldots + b_{0,1}\,y + b_{0,0}) = 0.$$

Der erste Index der Coefficienten gibt den Grad von x, der zweite den Grad von y an. Zur Vereinfachung wollen wir in die Gleichung (1) die Coefficienten

$$A_0\;A_1\;A_2\;A_3\;\ldots\ldots\;A_n$$

einführen, deren Bildung folgende ist:

$$A_0 = a_{n,0}.$$
$$A_1 = a_{n-1,1}\,y + a_{n-1,0}.$$
$$A_2 = a_{n-2,2}\,y^2 + a_{n-2,1}\,y + a_{n-2,0}.$$
$$A_3 = a_{n-3,3}\,y^3 + a_{n-3,2}\,y^2 + a_{n-3,1}\,y + a_{n-3,0}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = a_{0,n}\,y^n + a_{0,n-1}\,y^{n-1} + \ldots + a_{0,1}\,y + a_{0,0}.$$

Der Index des A gibt den höchsten Grad des Coefficienten in y an. In die Gleichung (2) führen wir die Coefficienten:

$$B_0\;B_1\;B_2\;B_3\;\ldots\ldots\;B_n$$

ein, welche analog gebildet sind. Die Gleichungen (1) und (2) gehen dann über in:

(3). $A_0\,x^n + A_1\,x^{n-1} + A_2\,x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\,x + A_n = 0$

(4). $B_0\,x^n + B_1\,x^{n-1} + B_2\,x^{n-2} + \ldots + B_{n-1}\,x + B_n = 0.$

Diese Form der Gleichungen wählen wir bei unseren Betrachtungen.

a. Anzahl der fremdartigen Lösungen.

Wir wollen für verschiedene Gleichungen die Resultante bilden, ausgehend von den einfachsten Fällen.

1. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vom ersten Grade haben, den oben besprochenen Abkürzungen gemäss, folgende Gestalt:

$$\begin{cases} A_0 x + A_1 = 0 \\ B_0 x + B_1 = 0. \end{cases}$$

Die Resultante dieser beiden Gleichungen ist:

$$A_1 B_0 - A_0 B_1 = 0.$$

Hier tritt keine fremdartige Lösung auf, da vor der Division nur mit der Constanten B_0 multiplizirt worden ist.

2. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vom 2ten Grade

$$\begin{cases} A_0 x^2 + A_1 x + A_2 = 0 \\ B_0 x^2 + B_1 x + B_2 = 0. \end{cases}$$

Um bei der Division die Brüche zu vermeiden, multipliciren wir zuerst den Dividendus mit B_0.

$$\begin{array}{l|l} A_0 B_0 x^2 + A_1 B_0 x + A_2 B_0 & B_0 x^2 + B_1 x + B_2 \\ \hline - A_0 B_0 x^2 - A_0 B_1 x - A_0 B_2 & A_0 \\ \hline (A_1 B_0 - A_0 B_1) x + (A_2 B_0 - A_0 B_2) = R_1. & \end{array}$$

Den Coefficienten von x des Restes bezeichnen wir durch A_1', ebenso das von x freie Glied $A_2 B_0 - A_0 B_2$ durch A_2'. Der untere Index gibt wieder den höchsten Grad in y an. Der erste Rest ist also:

$$A_1' x + A_2' = R_1.$$

Durch diesen Rest wird nun der linke Theil der zweiten Gleichung dividirt, nachdem sie vorher mit $(A_1')^2$ multiplizirt ist.

$$\begin{array}{l|l} B_0 (A_1')^2 x^2 + B_1 (A_1')^2 x + B_2 (A_1')^2 & A_1' x + A_2' \\ \hline - B_0 (A_1')^2 x^2 - B_0 A_1' A_2' x & B_0 A_1' x + B_2' \\ \hline A_1' (A_1' B_1 - A_2' B_0) x + A_1' (A_1' B_2). & \end{array}$$

Nach der vorhin angeführten Bezeichnung schreiben wir für den letzten Ausdruck:

$A_1^I B_2^I x + A_1^I B_3^I$ und dividiren nochmals durch R_1.

$$\begin{array}{l} -A_1^I B_2^I x - A_2^I B_2^I \\ \hline A_1^I B_2^I - A_2^I B_2^I = B_4^{II}. \end{array}$$

Der linke Theil dieser letzten Gleichung ist die Resultante, weil sie nur noch eine Unbekannte enthält. Sie ist in Bezug auf y höchstens vom 4ten Grade, enthält also nach dem Bézout'schen Satze »Ueber den Grad der Resultanten« keine fremdartigen Lösungen. Drücken wir die accentuirten Coefficienten durch die nicht accentuirten aus und setzen wir, wie üblich,

$$A_i B_k - A_k B_i = (i, k),$$

so ist

$$A_1^I = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 \\ B_1 & B_0 \end{vmatrix} = (1,0);$$

$$A_2^I = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix} = (2,0);$$

$$B_2^I = \begin{vmatrix} (1,0) & B_0 \\ (2,0) & B_1 \end{vmatrix}; \quad B_3^I = (1,0)\, B_2$$

$$B_4^{II} = -B_0 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1) \end{vmatrix}.$$

Der in B_0 multiplicirte Ausdruck stimmt mit der Resultante, welche man nach der Bézout-Caley'schen Methode erhält, genau überein. Da B_0 weder x noch y enthält, verursacht es keine fremdartigen Lösungen.

3. Zwei Gleichungen vom 3ten Grade haben allgemein die Form:

$$\begin{cases} A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0 \\ B_0 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3 = 0. \end{cases}$$

Bei der auszuführenden Division behalten wir die oben angeführte Bezeichnung bei und multipliciren jedesmal mit den entsprechenden Coefficienten.

$$A_0B_0x^3+A_1B_0x^2+A_2B_0x+A_3B_0 \;\Big|\; \frac{B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3}{A_0}$$
$$-A_0B_0x^3-A_0B_1x^2-A_0B_2x-A_0B_3$$
$$(A_1B_0-A_0B_1)x^2+(A_2B_0-A_0B_2)x+(A_3B_0-A_0B_3)=A_1'x^2+A_2'x+A_3'$$

$$B_0(A_1')^2x^3+B_1(A_1')^2x^2+B_2(A_1')^2x+B_3(A_1')^2 \;\Big|\; \frac{A_1'x^2+A_2'x+A_3'}{A_1'B_0x+B_2'}$$
$$-B_0(A_1')^2x^3-A_1'A_2'B_0x^2-A_1'A_3'B_0x$$
$$A_1'(A_1'B_1-A_2'B_0)x^2+A_1'(A_1'B_2-A_3'B_0)x+A_1'(A_1'B_3)=$$
$$=A_1'B_2'x^2+A_1'B_3'x+A_1'B_4'$$
$$-A_1'B_2'x^2-A_2'B_2'x-A_3'B_2'$$
$$(A_1'B_3'-A_2'B_2')x+(A_1'B_4'-A_3'B_2')=B_4''x+B_5''$$

$$A_1'(B_4'')^2x^2+A_2'(B_4'')^2x+A_3'(B_4'')^2 \;\Big|\; \frac{B_4''x+B_5''}{A_1'B_4''x+A_6''}$$
$$-A_1'(B_4'')^2x^2-A_1'B_4''B_5''x$$
$$B_4''(A_2'B_4''-A_1'B_5'')x+B_4''(A_3'B_4'')=$$
$$=B_4''A_6''x+B_4''A_7''$$
$$-B_4''A_6''x-A_6''B_5''$$
$$A_7''B_4''-A_6''B_5''=A_{11}'''.$$

Die Resultante ist also in Bezug auf y vom 11ten Grade. Da sie aber nach dem Bezout'schen Satze nur vom 9ten Grade sein darf, enthält sie zwei fremdartige Lösungen. Wir werden nun sehen, dass sie als fremdartige Lösungen die Wurzeln der Gleichung

$$(1,0)^2=0$$

enthält. Um dies zu zeigen wollen wir die accentuirten Coefficienten durch die nicht accentuirten ausdrücken.

$$A_1'=(1,0);\quad A_2'=(2,0);\quad A_3'=(3,0);$$

$$B_2'=\begin{vmatrix}(1,0) & B_0\\ (2,0) & B_1\end{vmatrix};\quad B_3'=\begin{vmatrix}(1,0) & B_0\\ (3,0) & B_2\end{vmatrix};$$

$$B_4'=B_3\begin{vmatrix}A_1 & A_0\\ B_1 & B_0\end{vmatrix};\quad B_4''=-B_0\begin{vmatrix}(1,0) & (2,0)\\ (2,0) & (2,1)+(3,0)\end{vmatrix};$$

$$B_5^{II} = -\begin{vmatrix}(1,0) & (3,0)\\ (2,0) & (3,1)\end{vmatrix} . B_0;\quad A_6^{II} = -B_0\begin{vmatrix}0 & (1,0) & (2,0)\\ (1,0) & (2,0) & (3,0)\\ (2,0) & (2,1) & (3,1)\end{vmatrix};$$

$$A_7^{II} = -B_0(3,0)\begin{vmatrix}(1,0) & (2,0)\\ (2,0) & (2,1)+(3,0)\end{vmatrix}.$$

Für den Ausdruck A_{11}^{III} erhalten wir, wenn wir

$(1,0)(1,2)(2,0)^2(3,0) - (1,0)(1,3)(2,0)^3 = -(1,0)^2(2,0)^2(2,3)$ und

$(1,0)^2(1,2)^2(3,0) - (1,0)^2(1,2)(1,3)(2,0) = -(1,0)^3(1,2)(2,3)$ und

$(1,0)^2(1,3)(2,0)(3,0) - (1,0)^2(1,2)(3,0)^2 = (1,0)^3(2,3)(3,0)$

setzen,

$$A_{11}^{III} = -B_0^2(1,0)^2\begin{vmatrix}(1,0) & (2,0) & (3,0)\\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)\\ (3,0) & (3,1) & (3,2)\end{vmatrix}.$$

Die Determinante ist genau die Resultante, welche man nach der Bézout-Cayley'schen Methode erhält. Die Resultante zweier Gleichungen 3ten Grades, durch Division gebildet, hat also zwei fremdartige Lösungen und zwar die Wurzeln der Gleichung:

$$(1,0)^2 = 0.$$

4. Zwei Gleichungen vom 4ten Grade.

$$\begin{cases} A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0\\ B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4 = 0.\end{cases}$$

Führen wir auch hier, wie vorhin, die Division aus, so ergibt sich:

$$\begin{array}{l|l} A_0B_0x^4 + A_1B_0x^3 + A_2B_0x^2 + A_3B_0x + A_4B_0 & B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4 \\ -A_0B_0x^4 - A_0B_1x^3 - A_0B_2x^2 - A_0B_3x - A_0B_4 & \hline A_0 \\ \hline (A_1B_0 - A_0B_1)x^3 + (A_2B_0 - A_0B_2)x^2 + (A_3B_0 - A_0B_3)x + (A_4B_0 - A_0B_4) = & \\ A_1^1x^3 + A_2^1x^2 + A_3^1x + A_4^1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} B_0(A_1^1)^2x^4 + B_1(A_1^1)^2x^3 + B_2(A_1^1)^2x^2 + B_3(A_1^1)^2x + B_4(A_1^1)^2 & A_1^1x^3 + A_2^1x^2 + A_3^1x + A_4^1 \\ -B_0(A_1^1)^2x^4 - A_1^1A_2^1B_0x^3 - A_1^1A_3^1B_0x^2 - A_1^1A_4^1B_0x & \hline A_1^1B_0x + B_2^1 \\ \hline A_1^1(A_1^1B_1 - A_2^1B_0)x^3 + A_1^1(A_1^1B_2 - A_3^1B_0)x^2 + A_1^1(A_1^1B_3 - A_4^1B_0)x + A_1^1(A_1^1B_4) = & \end{array}$$

$$= A_1^{\mathrm{I}} B_2^{\mathrm{I}} x^3 + A_1^{\mathrm{I}} B_3^{\mathrm{I}} x^2 + A_1^{\mathrm{I}} B_4^{\mathrm{I}} x + A_1^{\mathrm{I}} B_5^{\mathrm{I}}$$
$$- A_1^{\mathrm{I}} B_2^{\mathrm{I}} x^3 - A_2^{\mathrm{I}} B_2^{\mathrm{I}} x^2 - A_3^{\mathrm{I}} B_2^{\mathrm{I}} x - A_4^{\mathrm{I}} B_2^{\mathrm{I}}$$

$$(A_1^{\mathrm{I}} B_3^{\mathrm{I}} - A_2^{\mathrm{I}} B_2^{\mathrm{I}}) x^2 + (A_1^{\mathrm{I}} B_4^{\mathrm{I}} - A_3^{\mathrm{I}} B_2^{\mathrm{I}}) x + (A_1^{\mathrm{I}} B_5^{\mathrm{I}} - A_4^{\mathrm{I}} B_2^{\mathrm{I}}) = B_4^{\mathrm{II}} x^2 + B_5^{\mathrm{II}} x + B_6^{\mathrm{II}}$$

$$A_1^{\mathrm{I}} (B_4^{\mathrm{II}})^2 x^3 + A_2^{\mathrm{I}} (B_4^{\mathrm{II}})^2 x^2 + A_3^{\mathrm{I}} (B_4^{\mathrm{II}})^2 x + A_4^{\mathrm{I}} (B_4^{\mathrm{II}})^2 \;\Big|\; \frac{B_4^{\mathrm{II}} x^2 + B_5^{\mathrm{II}} x + B_6^{\mathrm{II}}}{A_1^{\mathrm{I}} B_4^{\mathrm{II}} x + A_6^{\mathrm{II}}}$$
$$- A_1^{\mathrm{I}} (B_4^{\mathrm{II}})^2 x^3 - A_1^{\mathrm{I}} B_4^{\mathrm{II}} B_5^{\mathrm{II}} x^2 - A_1^{\mathrm{I}} B_4^{\mathrm{II}} B_6^{\mathrm{II}} x$$

$$B_4^{\mathrm{II}} (A_2^{\mathrm{I}} B_4^{\mathrm{II}} - A_1^{\mathrm{I}} B_5^{\mathrm{II}}) x^2 + B_4^{\mathrm{II}} (A_3^{\mathrm{I}} B_4^{\mathrm{II}} - A_1^{\mathrm{I}} B_6^{\mathrm{II}}) x + B_4^{\mathrm{II}} (A_4^{\mathrm{I}} B_4^{\mathrm{II}}) =$$
$$= B_4^{\mathrm{II}} A_6^{\mathrm{II}} x^2 + B_4^{\mathrm{II}} A_7^{\mathrm{II}} x + B_4^{\mathrm{II}} A_8^{\mathrm{II}}$$
$$- B_4^{\mathrm{II}} A_6^{\mathrm{II}} x^2 - A_6^{\mathrm{II}} B_5^{\mathrm{II}} x - B_6^{\mathrm{II}} A_6^{\mathrm{II}}$$

$$(B_4^{\mathrm{II}} A_7^{\mathrm{II}} - B_5^{\mathrm{II}} A_6^{\mathrm{II}}) x + (B_4^{\mathrm{II}} A_8^{\mathrm{II}} - B_6^{\mathrm{II}} A_6^{\mathrm{II}}) = A_{11}^{\mathrm{III}} x + A_{12}^{\mathrm{III}}$$

$$B_4^{\mathrm{II}} (A_{11}^{\mathrm{III}})^2 x^2 + B_5^{\mathrm{II}} (A_{11}^{\mathrm{III}})^2 x + B_6^{\mathrm{II}} (A_{11}^{\mathrm{III}})^2 \;\Big|\; \frac{A_{11}^{\mathrm{III}} x + A_{12}^{\mathrm{III}}}{A_{11}^{\mathrm{III}} B_4^{\mathrm{II}} x + B_{16}^{\mathrm{III}}}$$
$$- B_4^{\mathrm{II}} (A_{11}^{\mathrm{III}})^2 x^2 - B_4^{\mathrm{II}} A_{11}^{\mathrm{III}} A_{12}^{\mathrm{III}} x$$

$$A_{11}^{\mathrm{III}} (A_{11}^{\mathrm{III}} B_5^{\mathrm{II}} - A_{12}^{\mathrm{III}} B_4^{\mathrm{II}}) x + A_{11}^{\mathrm{III}} (A_{11}^{\mathrm{III}} B_6^{\mathrm{II}}) =$$
$$= A_{11}^{\mathrm{III}} B_{16}^{\mathrm{III}} x + A_{11}^{\mathrm{III}} B_{17}^{\mathrm{III}}$$
$$- A_{11}^{\mathrm{III}} B_{16}^{\mathrm{III}} x - A_{12}^{\mathrm{III}} B_{16}^{\mathrm{III}}$$

$$A_{11}^{\mathrm{III}} B_{17}^{\mathrm{III}} - A_{12}^{\mathrm{III}} B_{16}^{\mathrm{III}} = B_{28}^{\mathrm{IV}}$$

Die Resultante hat also 12 fremdartige Lösungen. Wir werden sehen, dass als fremdartige Lösungen die Wurzeln der beiden Gleichungen

$$(A_1^{\mathrm{I}})^4 = 0; \quad (B_4^{\mathrm{II}})^2 = 0$$

ausgeschieden werden können. Bilden wir wieder die Ausdrücke für die Coefficienten, so ergibt sich:

$$A_1^{\mathrm{I}} = (1,0); \quad A_2^{\mathrm{I}} = (2,0); \quad A_3^{\mathrm{I}} = (3,0); \quad A_4^{\mathrm{I}} = (4,0)$$

$$B_2^{\mathrm{I}} = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}; \quad B_3^{\mathrm{I}} = \begin{vmatrix} (1,0) & (3,0) \\ B_0 & B_2 \end{vmatrix};$$

$$B_4^{\mathrm{I}} = \begin{vmatrix} (1,0) & (4,0) \\ B_0 & B_3 \end{vmatrix}; \quad B_5^{\mathrm{I}} = (1,0)\, B_4;$$

$$B_4^{\mathrm{II}} = -B_0 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) \end{vmatrix}; \quad B_5^{\mathrm{II}} = -B_0 \begin{vmatrix} (1,0) & (3,0) \\ (2,0) & (3,1)+(4,0) \end{vmatrix};$$

$$B_6^{\mathrm{II}} = -B_0 \begin{vmatrix} (1,0) & (4,0) \\ (2,0) & (4,1) \end{vmatrix};$$

$$A_6^{II} = -B_0 \begin{vmatrix} 0 & (1,0) & (2,0) \\ (1,0) & (2,0) & (2,1)+(3,0) \\ (2,0) & (3,0) & (3,1)+(4,0) \end{vmatrix};$$

$$A_7^{II} = -B_0 \begin{vmatrix} 0 & (1,0) & (2,0) \\ (1,0) & (2,0) & (2,1)+(3,0) \\ (3,0) & (4,0) & (4,1) \end{vmatrix};$$

$$A_8^{II} = -B_0 (4,0) \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0 \\ (2,0) & (2,1)+3,0) \end{vmatrix};$$

$$A_{11}^{III} = -B_0^2 (1,0)^2 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) \\ (3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1) \end{vmatrix};$$

$$A_{12}^{III} = -B_0^2 (1,0)^2 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) \\ (4,0) & (4,1) & (4,2) \end{vmatrix};$$

$$B_{16}^{III} = B_0^3 (1,0)^2 \left\{ \begin{vmatrix} (1,0) & (3,0) \\ (2,0) & (3,1)+(4,0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) \\ (3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1) \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) \\ (4,0) & (4,1) & (4,2) \end{vmatrix} \right\};$$

$$B_{17}^{III} = B_0^3 (1,0)^2 \begin{vmatrix} (1,0) & (4,0) \\ (2,0) & (4,1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) \\ (3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1) \end{vmatrix};$$

$$B_{28}^{IV} = -B_0^5 (1,0)^4 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) & (4,1) \\ (3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1) & (4,2) \\ (4,0) & (4,1) & (4,2) & (4,3) \end{vmatrix}.$$

Die Determinante 4ten Grades ist die Resultante, welche man nach der Bézout-Cayley'schen Methode erhält. Die fremdartigen Lösungen sind also die Wurzeln der Gleichungen

$$(1,0)^4 = 0; \quad \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) \end{vmatrix}^2 = 0.$$

5. Zwei Gleichungen vom 5ten Grade. Wir wollen hier nicht die vollständige Division ausführen, sondern nur jedesmal das Resultat der Division hinschreiben.

$$\begin{aligned}
A_0 x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x + A_5 &= 0 \text{*)} \\
B_0 x^5 + B_1 x^4 + B_2 x^3 + B_3 x^2 + B_4 x + B_5 &= 0 \\
A'_1 x^4 + A'_2 x^3 + A'_3 x^2 + A'_4 x + A'_5 &= R_1 \\
B'_2 x^4 + B'_3 x^3 + B'_4 x^2 + B'_5 x + B'_6 & \\
B''_4 x^3 + B''_5 x^2 + B''_6 x + B''_7 &= R_2 \\
A''_6 x^3 + A''_7 x^2 + A''_8 x + A''_9 & \\
A'''_{11} x^2 + A'''_{12} x + A'''_{13} &= R_3 \\
B'''_{16} x^2 + B'''_{17} x + B'''_{18} & \\
B^{IV}_{28} x + B^{IV}_{29} &= R_4 \\
A^{IV}_{40} x + A^{IV}_{41} & \\
A^{V}_{69} &= R_5
\end{aligned}$$

Die Resultante zweier Gleichungen 5ten Grades hat also 44

*) Man braucht, um die Resultante durch Division zu erhalten, die Division selbst nicht auszuführen. Die Resultate der Division lassen sich nach einem einfachen Gesetze sofort hinschreiben. Man schreibe die gegebenen Gleichungen untereinander. Die dritte Reihe hat als Anfangsglied das zweite Glied der ersten Gleichung, nur ist der Coefficient oben mit der Marke I versehen. Jetzt folgt eine Reihe von demselben Grade mit den Coefficienten B, deren unterer Index um 1 höher ist, als bei der vorigen Reihe. Von nun an bleiben die oberen Indices in zwei auf einander folgenden Reihen dieselben, ebenso folgen zweimal die Coefficienten A und auch B auf einander. In jeder dritten Reihe nimmt der obere Index um 1 zu. Man erhält eine neue Reihe aus der vorigen, indem man zum unteren Index dieser Reihe den unteren Index des zweiten Gliedes des letzten Restes addirt. Die Glieder einer Reihe haben denselben oberen Index. Während der untere Index in jedem folgenden Gliede um 1 zunimmt, nimmt der Grad der Unbekannten um 1 ab. Das letzte Glied enthält die Unbekannte auf der o^{ten} Potenz.

fremdartige Lösungen, welche enthalten sind als Wurzeln in den Gleichungen

$$(A_1^{\mathrm{I}})^6 = 0;\ (B_4^{\mathrm{II}})^4 = 0;\ (A_{11}^{\mathrm{III}})^2 = 0.$$

Da bei unserer Untersuchung nur die Coefficienten A_1^{I}, B_4^{II} und A_{11}^{III} in Betracht zu ziehen sind, so wollen wir nur diese durch bekannte Grössen ausdrücken.

$$(A_1^{\mathrm{I}})^6 = (1,0)^6;\ (B_4^{\mathrm{II}})^4 = B_0^4 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) \end{vmatrix}^4$$

$$(A_{11}^{\mathrm{III}})^2 = B_0^4\,(1,0)^4 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) \\ (3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1)+(5,0) \end{vmatrix}^2$$

6. Zwei Gleichungen 6ten Grades haben die Resultante

$$A_{69}^{\mathrm{V}} B_{99}^{\mathrm{V}} - A_{70}^{\mathrm{V}} B_{98}^{\mathrm{V}}.$$

Sie enthält 132 fremdartige Lösungen. Diese sind die Wurzeln der Gleichungen

$$(B_{28}^{\mathrm{IV}})^2 = 0;\ (A_{11}^{\mathrm{III}})^4 = 0;\ (B_4^{\mathrm{II}})^6 = 0;\ (A_1^{\mathrm{I}})^8 = 0.$$

Drücken wir die linken Theile dieser Gleichungen durch bebekannte Grössen aus, so erhalten wir:

$$(A_1^{\mathrm{I}})^8 = (1,0)^8;\ (B_4^{\mathrm{II}})^6 = B_0^6 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) \end{vmatrix}^6;$$

$$(A_{11}^{\mathrm{III}})^4 = B_0^8\,(1,0)^8 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) \\ (3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1)+(5,0) \end{vmatrix}^4$$

$$(B_{28}^{\mathrm{IV}})^2 = B_0^{10}\,(1,0)^8 \left\{ \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) \end{vmatrix}^4 \cdot \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1)+(5,0) \\ (3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1)+(5,0) & (4,2)+(5,1)+(6,0) \\ (4,0) & (3,2)+(4,1)+(5,0) & (4,2)+(5,1)+(6,0) & (4,3)+(5,2)+(6,1) \end{vmatrix}^2 \right\}.$$

Wir wollen nun die gewonnenen Resultate übersichtlich zusammenstellen und dann ein allgemeines Gesetz abzuleiten suchen, nach welchem die Anzahl der fremdartigen Lösungen der Resultante zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten vom n^{ten} Grade anzugeben ist.

n	Resultante.	Gleichungen, deren Wurzeln als fremdartige Lösungen auszuscheiden sind.
1	$A^{\text{I}}_{1} = 0$	0
2	$B^{\text{II}}_{4} = 0$	0
3	$A^{\text{III}}_{1\,1} = 0$	$(A^{\text{I}}_{1})^2 = 0.$
4	$B^{\text{IV}}_{2\,8} = 0$	$(A^{\text{I}}_{1})^4 = 0;\ (B^{\text{II}}_{4})^2 = 0.$
5	$A^{\text{V}}_{6\,9} = 0$	$(A^{\text{I}}_{1})^6 = 0;\ (B^{\text{II}}_{4})^4 = 0;$ $(A^{\text{III}}_{1\,1})^2 = 0.$
6	$B^{\text{V}}_{1\,6\,8} = 0$	$(A^{\text{I}}_{1})^8 = 0;\ (B^{\text{II}}_{4})^6 = 0;$ $(A^{\text{II}}_{1\,1})^4 = 0;\ (B^{\text{IV}}_{2\,8})^2 = 0.$

. . . . . .

Bezeichnen wir durch $\alpha_{(n,n)}$ die Anzahl der Lösungen (die fremdartigen mit eingeschlossen), welche die Endgleichung zweier Gleichungen des n^{ten} Grades besitzt, so können wir die Anzahl der fremdartigen Lösungen, welche 2 Gleichungen vom $(n+2)^{\text{ten}}$ Grade haben, durch folgende Formel angeben:

$$\alpha^2_{(n,n)} + \alpha^4_{(n-1,n-1)} + \alpha^6_{(n-2,n-2)} + \alpha^8_{(n-3,n-3)} + \ldots + \alpha^{2n-2}_{2} + \alpha^{2n}_{1}.$$

Ist diese Formel für 2 Gleichungen n^{ten} Grades anwendbar, so hat sie auch für 2 Gleichungen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades Geltung.

Dies ergiebt sich aus folgender Betrachtung:

Die Anzahl der fremdartigen Lösungen zweier Gleichungen n^{ten} Grades ist

$$\alpha^{3}_{(n-2,n-2)} + \alpha^{4}_{(n-3,n-3)} + \alpha^{6}_{(n-4,n-4)} + \ldots + \alpha_{2}^{2n-6} + \alpha_{1}^{2n-4}.$$

Die Multiplikation vor der letzten Division geschah mit dem Ausdrucke $\alpha^{3}_{(n-1,n-1)}$. Die letzte Multiplication liefert aber keine fremdartigen Lösungen. Ist dagegen der Grad der Gleichungen der $(n+1)^{\text{te}}$, so liefert dieser Faktor fremdartige Lösungen, weil mit demselben vor der vorletzten Division multiplizirt wurde. Die Endgleichung enthält also $\alpha^{3}_{(n-1,n-1)}$ fremdartige Lösungen mehr; ausserdem müssen aber, weil der Grad der Gleichungen um 1 höher ist und also eine Division mehr ausgeführt wurde, die Exponenten der übrigen Glieder um 2 steigen. Setzen wir in der Reihe

$$\alpha^{3}_{(n-2,n-2)} + \alpha^{4}_{(n-3,n-3)} + \ldots + \alpha_{2}^{2n-6} + \alpha_{1}^{2n-4}$$

für n den Werth $n+1$, so resultirt folgende Reihe

$$\alpha^{3}_{(n-1,n-1)} + \alpha^{4}_{(n-2,n-2)} + \alpha^{6}_{(n-3,n-3)} + \ldots + \alpha_{2}^{2n-3} + \alpha_{1}^{2n-2}.$$

Diese Reihe besitzt die verlangten Eigenschaften, daher gilt sie für jeden Werth von n.

Die Reihe lässt sich noch in eine einfachere umgestalten, wie folgende Betrachtung zeigen wird:

A^{I}_{1} ist ein Ausdruck 1ten Grades.

B^{II}_{4} » » » 4ten » .

Diese beiden lassen sich nicht in einfachere Ausdrücke zerlegen.

$A^{\text{III}}_{1,1}$ ist ein Ausdruck 11ten Grades, welcher sich in einen Ausdruck 9ten Grades und in $(A^{\text{I}}_{1})^{2}$ zerlegen lässt, wie wir schon unter 5. gesehen haben. Ebenso zerfällt $B^{\text{IV}}_{2,5}$ in einen Ausdruck vom 16ten Grade, in $(B^{\text{II}}_{4})^{2}$ und $(A^{\text{I}}_{1})^{4}$. Ferner ist $A^{\text{V}}_{6,9}$ zusammengesetzt aus einem Ausdrucke vom 25ten Grade, aus $(A^{\text{III}}_{1,1})^{2}$ $(B^{\text{II}}_{4})^{4}$ und $(A^{\text{I}}_{1})^{6}$; $(A^{\text{III}}_{1,1})^{2}$ zerfällt aber wieder, wie wir eben gesehen haben, in zwei Ausdrücke vom 9ten Grade und in $(A^{\text{I}}_{1})^{4}$.

Formen wir diesen Betrachtungen gemäss unsere vorhin entwickelte Reihe um, so hat die Endgleichung zweier Gleichungen n^{ten} Grades, welche durch Division gebildet ist, folgende Anzahl fremdartiger Lösungen:

$$2(n-2)^2 + 4(n-3)^2 + 10(n-4)^2 + 24(n-5)^2 +$$
$$58(n-6)^2 + 140(n-7)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Die Coefficienten sind recurrirend gebildet nach der allgemeinen Formel:

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}.$$

b. Beschaffenheit der fremdartigen Lösungen.

Betrachten wir die Determinanten, welche die fremdartigen Lösungen enthalten, so finden wir, dass sie nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind.

Die fremdartigen Lösungen zweier Gleichungen 4ten Grades sind enthalten in den Ausdrücken:

$$(1,0)^4; \left| \begin{matrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) \end{matrix} \right|^2.$$

Die erste Zeile sowie die erste Columne der Determinante bestehen aus den Elementen $(1,0)$ und $(2,0)$. Das zweite Element der zweiten Columne besteht aus einem Summanden. Die Glieder dieses Summanden sind durch je zwei Zahlen aus der Reihe

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4$$

gebildet, deren Summe gleich 3 ist. Dies sind $(2,1)$ und $(3,0)$. Die grössere Zahl wird zuerst geschrieben und von der kleineren durch ein Komma getrennt. Beide werden mit einer Klammer umgeben. Zwei gleiche Zahlen können nicht in einer Klammer vorkommen, weil die Reihe jede Zahl nur einmal enthält; ausserdem würde auch dann diese Klammer weggelassen werden können, weil sie gleich Null ist. Hätten wir z. B. den Ausdruck $(2,2)$ so würde sein

$$(2,2) = A_2 B_2 - A_2 B_2 = 0.$$

Zwei Gleichungen 5ten Grades haben die fremdartigen Lösungen:

$$(1,0)^{10};\left|\begin{matrix}(1,0) & (2,0)\\ (2,0) & (2,1)+(3,0)\end{matrix}\right|^{4};$$

$$\left|\begin{matrix}(1,0) & (2,0) & (3,0)\\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0)\\ (3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1)+(5,0)\end{matrix}\right|^{2}.$$

Die erste Determinante ist gleich der vorhin besprochenen. Die Determinante 3ten Grades enthält in der ersten Zeile und Columne die Elemente

$$(1,0)\ (2,0)\ (3,0).$$

Alle anderen Elemente bestehen aus Summanden. Die Glieder des zweiten Elementes der zweiten Columne sind aus je zwei der Zahlen

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5$$

gebildet, deren Summe gleich 3 ist, also aus $(2,1)$ und $(3,0)$. Die Glieder des dritten Elementes der zweiten Columne sind aus je zwei derselben Zahlen gebildet, deren Summe aber gleich 4 ist, aso $(3,1)$ und $(4,0)$. Da die Determinante symmetrisch ist, so muss auch dieses Element gleich dem 2ten Elemente der dritten Columne sein. Die Glieder des dritten Elementes der dritten Columne sind aus je zwei derselben Zahlen gebildet, deren Summe aber gleich 5 sein muss, also die Glieder

$$(32)\ (4,1)\ (50,).$$

Die Resultante zweier Gleichungen 6ten Grades enthält ausser den 2 bereits besprochenen Determinanten noch die Determinate 4ten Grades als fremdartige Lösung.

$$\left|\begin{matrix}(1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0)\\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1)+(5,0)\\ (3,0) & (3,1)+(4,0) & (3,2)+(4,1)+(5,0) & (4,2)+(5,1)+(6,0)\\ (4,0) & (3,2)+(4,1)+(5,0) & (4,2)+(5,1)+(6,0) & (4,3)+(5,2)+(6,1)\end{matrix}\right|.$$

Die erste Zeile und die erste Columne ist aus den Elementen

$$(1,0)\ (2,0)\ (3,0)\ (4,0)$$

gebildet. Die Bildung des 2ten und 3ten Elementes der 2ten und 3ten Columne ist ebenso, wie bei der vorhin besprochenen Determinate 3ten Grades. Das 4te Element der 2ten Columne besteht aus den Gliedern, welche aus je zwei der Zahlen

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$$

gebildet sind, deren Summe gleich 5 ist. Dies sind die Glieder

$$(3,2)\ (4,1)\ (5,0).$$

Da die Determinante symmetrisch ist, so wird aus diesen Gliedern auch das 2te Element der 4ten Columne gebildet sein. Das 4te Element der dritten Columne enthält die Glieder, welche aus je zwei der Zahlen

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$$

gebildet sind, deren Summe aber gleich 6 ist. Dies sind die Glieder

$$(4,2)\ (5,1)\ (6,0).$$

Diese Glieder bilden auch das 3te Element der 4ten Columne. Das 4te Element der 4ten Columne endlich besteht aus den Gliedern, welche aus je zwei derselben Zahlen gebildet sind. Ihre Summe ist aber gleich 7. Daher haben wir die Glieder

$$(4,3)\ (5,2)\ (6,1).$$

Das allgemeine Bildungsgesetz tritt hier schon deutlich hervor.

Will man die Determinaten bilden, welche die fremdartigen Lösungen der Resultante zweier Gleichungen n^{ten} Grades enthalten, so bildet man am zweckmässigsten zuerst die Determinante $(n-2)^{ten}$ Grades, weil sich aus dieser die anderen sehr einfach herleiten lassen.

Die erste Zeile und die erste Columne der Determinante $(n-2)^{ten}$ Grades wird gebildet durch die Elemente

$$(1,0)\ (2,0)\ (3,0)\ \ldots\ldots\ (n-3,0)\ (n-2,0).$$

Das zweite Element der 2ten Columne besteht aus den Gliedern, welche aus je zwei der $(n+1)$ Zahlen

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ldots\ldots\ n$$

so gebildet sind, dass ihre Summe gleich 3 ist. Das dritte Element dieser Columne besteht aus den Gliedern, welche aus je zwei der $(n+1)$ Zahlen, deren Summe gleich 4 ist, gebildet sind u. s. w.

Das 2te Element der 3ten Columne besteht aus den Gliedern, welche aus je zwei der $(n+1)$ Zahlen gebildet sind, deren Summe gleich 4 ist. u. s. w. Geht man in einer Columne um 1 Element nach unten oder in einer Zeile um 1 Element nach rechts, so muss die Summe der beiden Zahlen, aus denen die Glieder des Elements gebildet sind, immer um 1 wachsen.

Die Determinate $(n-3)^{ten}$ Grades erhält man aus der vom $(n-2)^{ten}$ Grade, indem man die letzte Zeile und die letzte Columne wegstreicht. Aus dieser erhält man die Determinante $(n-4)^{ten}$ Grades, indem man wiederum die letzte Zeile und die letzte Columne wegstreicht. Fährt man so fort, so wird endlich nur das Element $(1,0)$ übrig bleiben. Wie oft jede Determinante in der betreffenden Resultante enthalten ist, lässt sich nach der früher entwickelten Reihe angeben. Alle Determinanten sind symmetrisch.

Es lässt sich aus der Division leicht ersehen, dass diese Determinanten so zusammengesetzt sein müssen:

Bei zwei Gleichungen 3ten Grades hat der Coefficient B_4^{II} das Glied $-(1,0)\,.\,(3,0)$ mehr, als bei zwei Gleichungen 2ten Grades. B_4^{II} ist nämlich gebildet aus den Grössen $A_1^I\,B_3^I - A_2^I\,B_2^I$. In allen Gleichungen haben A_1^I, A_2^I und B_2^I denselben Werth. Bei zwei Gleichungen 2ten Grades ist $B_3^I = (1,0)\,B_2$, bei allen anderen Gleichungen dagegen

$$B_3^I = (1,0)\,B_2 - (3,0)\,B_0.$$

A_{11}^{III} ist gebildet aus den Grössen $A_7^{II}\,B_4^{II} - A_6^{II}\,B_5^{II}$ und hat bei zwei Gleichungen 4ten Grades 6 Glieder mehr, als bei 2 Gleichungen 3ten Grades, weil B_4^I bei den Gleichungen verschiedene Werthe hat und B_5^I bei den Gleichungen 3ten Grades noch gar nicht vorkam. Bei allen folgenden Gleichungen bleiben A_6^{II}, B_4^{II} und B_5^{II} constant. A_7^{II} erhält bei zwei Gleichungen 5ten Grades ein Glied

mehr, als bei 2 Gleichungen 4ten Grades, weil B_3^{I} das Glied $-(5,0)B_0$ mehr erhalten hat. Weil A_7^{II} um 1 Glied gewachsen ist, so muss, da dies eine Glied mit den 3 Gliedern von B_4^{II} multiplicirt wird, A_{11}^{III} bei zwei Gleichungen 5ten Grades um 3 Glieder wachsen. Dies sind die Glieder

$$(1,0)^3(1,2)(1,5) - (1,0)^3(3,0)(5,0) + (1,0)^2(2,0)^2(5,0).$$

Von jetzt an bleibt auch A_{11}^{III} constant. Bei den anderen Determinanten verhält es sich analog.

II.

Untersuchung zweier Gleichungen, deren Grade verschieden sind.

a. Anzahl der fremdartigen Lösungen.

Der Grad der einen Gleichung sei der m^{te} der der anderen der n^{te} und zwar sei $m \geq n$.

1. Ist $n = 1$ oder $n = 2$, m aber beliebig gross, so hat die Endgleichung keine fremdartigen Lösungen, weil dann nur zwei Divisionen auszuführen sind. Vor der letzten Division wird mit einem Faktor multiplicirt, welcher freilich fremdartige Lösungen hervorbringen könnte, aber die letzte Multiplikation liefert bekanntlich keine fremdartigen Lösungen, wie wir auch bei der vorigen Untersuchung gesehen haben. Wir wollen hier noch das Beispiel behandeln, wo $m = 3$, $n = 2$ ist. Bilden wir die Endgleichung, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 &= 0 \\
B_0 x^2 + B_1 x + B_2 &= 0 \\
A_1^{\text{I}} x^2 + A_2^{\text{I}} x + A_3^{\text{I}} & \\
A_2^{\text{II}} x + A_3^{\text{II}} &= R_1 \\
B_3^{\text{I}} x + B_4^{\text{I}} & \\
A_2^{\text{II}} B_4^{\text{I}} - A_3^{\text{II}} B_3^{\text{I}} = B_6^{\text{II}} &= R_2.
\end{aligned}$$

Die Coefficienten enthalten folgende Werthe:

$$A_1^1 = (1,0);\ A_2^1 = (2,0);\ A_3^1 = A_3 \,.\, B_0;$$

$$A_2^{II} = -\begin{vmatrix} (1,0) & B_0 \\ (2,0) & B_1 \end{vmatrix};\ A_3^{II} = -\begin{vmatrix} (1,0) & B_0^2 \\ A_3 & B_2 \end{vmatrix};$$

$$B_3^I = -\begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & A_3 \,.\, B_0 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & B_0 & B_1 \end{vmatrix};\ B_4^I = -\begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}.$$

Für B_6^{II} würden wir folgenden Ausdruck erhalten:

$$B_6^{II} = B_0^2 \big[(1,0)\,(1,2)\,B_2 + (1,0)\,A_3\,B_1^2 - 2\,(1,0)\,A_3\,B_0\,B_2 + (2,0)^2\,B_2 - (2,0)\,A_3\,B_0\,B_1 + A_3^2\,B_0^3\big].$$

Setzen wir nun

$$2\,(1,0)\,A_3\,B_0\,B_2 = (1,0)\,A_3\,B_0\,B_2 + (2,0)\,A_3\,B_0\,B_1 + (1,2)\,A_3\,B_0^2,$$

so lässt sich B_6^{II} in Determinantenform schreiben.

$$B_6^{II} = -B_0^2 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & A_3 \,.\, B_0 \\ (2,0) & (2,1) + A_3 \,.\, B_0 & A_3 \,.\, B_1 \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Diese Resultante kann man auch aus der Resultante zweier Gleichungen 3ten Grades bilden, indem man $B_3 = 0$ setzt und die dritte Zeile durch A_3 dividirt.

2. Es sei $m = 4$ und $n = 3$, also die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} A_0\,x^4 + A_1\,x^3 + A_2\,x^2 + A_3\,x + A_4 = 0 \\ B_0\,x^3 + B_1\,x^2 + B_2\,x + B_3 = 0. \end{cases}$$

Die Resultante dieser Gleichungen ist

$$A_{10}^{III}\,B_6^{II} - A_9^{III}\,B_7^{II} = B_{16}^{III}.$$

Die Resultante hat also 4 fremdartige Lösungen. Diese sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(A_2^{II})^2 = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Wird nun m um 1 grösser, so steigt die Anzahl der fremdartigen Lösungen um 2, weil dann jedesmal eine Division mehr ausgeführt werden muss, wodurch der Grad des ersten Restes sich um eine Einheit vergrössert. Wir haben dann statt $(A_2^{II})^2 = o$ folgende Gleichungen:

$$(A_3^{III})^2 = o;\ (A_4^{IV})^2 = o;\ (A_5^{V})^2 = o;\ \ldots\ldots,$$

deren Wurzeln als fremdartige Lösungen auszuscheiden sind. Der Grad der Endgleichung steigt dann jedesmal um 5. Weil m um 1 sich vergrössert, wird der Grad der Endgleichung um $1 . n = 3$ grösser. Ausserdem ist aber auch der erste Rest um 1 grösser geworden. Da dieser aber in der Endgleichung auf der 2ten Potenz vorkommt, so vergrössert er den Grad derselben um 2, also

$$1n + 2 = 5.$$

Zur Uebersicht möge folgende Tabelle dienen:

Für	ist der Grad der Resultante.	die Anzahl der fremdartigen Lösungen.
$m = 4;\ n = 3$	16	4
$m = 5;\ n = 3$	21	6
$m = 6;\ n = 3$	26	8
$m = 7;\ n = 3$	31	10

Setzen wir in die Ausdrücke A_2^{II}, A_3^{III} ... die bekannten Coefficienten ein, so ergibt sich:

$$(A_2^{II})^2 = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}^2;\ (A_3^{III})^2 = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & B_0 & B_1 \end{vmatrix}^2;$$

$$(A_4^{IV})^2 = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) & A_1.B_0 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 \end{vmatrix}^2;$$

$$(A_5^{V})^2 = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) & A_4.B_0 & A_5.B_0 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 & B_1 \end{vmatrix}^2;$$

. . . . . .

3. $m = 5;\ n = 4.$

Bilden wir die Endgleichung der beiden Gleichungen so erhalten wir

$$A_{16}^{IV} B_{24}^{III} - A_{17}^{IV} B_{23}^{III} = B_{40}^{IV}.$$

Die Resultante besitzt 20 fremdartige Lösungen und zwar die Wurzeln folgender Gleichungen:

$$(A_2^{II})^4 = 0;\ (B_6^{II})^2 = 0.$$

Steigt m um eine Einheit, so wird die Anzahl der fremdartigen Lösungen um 8 grösser, weil durch die einmal mehr stattfindende Division der Grad des ersten Restes um 1 grösser wird. Dadurch wird dann auch der Grad des 2ten Restes um 2 grösser. Wir haben also dann zur Ausscheidung der fremdartigen Lösungen folgende Gleichungen aufzulösen:

$$(A_2^{II})^4 = 0;\ (A_3^{III})^4 = 0;\ (A_4^{IV})^4 = 0;\ \ldots\ldots\ldots$$

einerseits, andererseits

$$(B_8^{III})^2 = 0;\ (B_{10}^{IV})^2 = 0;\ (B_{12}^{V})^2 = 0;\ \ldots\ldots\ldots$$

Der Grad der Resultante steigt dann jedesmal um 12, weil die fremdartigen Lösungen ihn um 8 erhöhen und das Steigen von m die Erhöhung von $1.n = 4$ bewirkt. Es ergibt sich also:

Für	der Grad der Resultante.	die Anzahl der fremdartigen Lösungen.
$m=5;\ n=4$	40	20
$m=6;\ n=4$	52	28
$m=7;\ n=4$	64	36
$m=8;\ n=4$	76	44
. . . . .	. . . .	. . . . .

Drücken wir A_2^{II}, A_3^{III} . . . . durch bekannte Grössen aus, so erhalten wir:

$$(A_2^{II})^4 = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}^4; \quad (A_3^{III})^4 = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & B_0 & B_1 \end{vmatrix}^4;$$

$$(A_4^{IV})^4 = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 \end{vmatrix}^4;$$

$$(A_5^{V})^4 = \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & A_5 \cdot B_0 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 & B_1 \end{vmatrix}^4;$$

$$(B_6^{II})^2 = B_0^4 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix}^2.$$

Aehnlich ergibt sich auch nach einigen Umformungen:

$$(B_8^{II})^2 = B_0^1 \begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) \\ (2,0) & (2,1)+(3,0) & (3,1)+(4,0) & (4,1)+A_5 . B_0 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix}^2 .$$

Bezeichnen wir durch $\alpha_{m,n}$ die Anzahl der Lösungen (die fremdartigen eingeschlossen), welche die Resultante zweier Gleichungen, deren Grad der m<u>te</u> und n<u>te</u> ist, besitzt, so kann man die Anzahl der fremdartigen Lösungen der Resultante zweier Gleichungen vom $(m+2)$<u>ten</u> und $(n+2)$<u>ten</u> Grade durch folgende Reihe angeben:

$$\alpha^2_{(m,n)} + \alpha^4_{(m-1,n-1)} + \alpha^6_{(m-2,n-2)} + \ldots\ldots + \alpha^{2n-2}_{(2+m-n,2)} + \alpha^{2n}_{(m-n+1,1)}.$$

Für $m = n$ ist diese Reihe dieselbe, wie diejenige im ersten Abschnitte. Wir können nun auch hier den Grad der Gleichungen, deren Wurzeln als fremdartige Lösungen auszuscheiden sind, noch reduciren. Wir wollen dies an einem Beispiele zeigen. Die Resultante der beiden Gleichungen

$$\begin{cases} A_0 x^6 + A_1 x^5 + A_2 x^4 + A_3 x^3 + A_4 x^2 + A_5 x + A_6 = 0 \\ B_0 x^5 + B_1 x^4 + B_2 x^3 + B_3 x^2 + B_4 x + B_5 = 0 \end{cases}$$

hat folgende Gestalt:

$$A^V_{58} B^{IV}_{40} - A^V_{57} B^{IV}_{41} = B^V_{98}.$$

Sie enthält also 68 fremdartige Lösungen, welche enthalten sind als Wurzeln in den Gleichungen

$$(A^{II}_2)^6 = 0;\ (B^{II}_6)^4 = 0;\ (A^{IV}_{16})^2 = 0.$$

Während der Division wurde mit den Ausdrücken:

$$(A^{II}_2)^2,\ (B^{II}_6)^2,\ (A^{IV}_{16})^2,\ (B^{IV}_{40})^2$$

multiplizirt. Da die letzte Multiplication keine fremdartigen Lösungen liefert, so fällt B^{IV}_{40} weg. Durch Bildung der Coefficienten würde sich ergeben, dass in A^{IV}_{16} noch $(A^{II}_2)^2$ enthalten ist, wodurch sich A^{IV}_{16} auf A^{IV}_{12} reducirt. Die fremdartigen Lösungen sind dann enthalten in folgendem Ausdrucke:

$$\left[A^{IV}_{(m-2,n-2)}\right]^2 . \left[B^{II}_{(m-3,n-3)}\right]^4 . \left[A^{II}_{(m-4,n-4)}\right]^{10} = 0.$$

Wir sehen also, dass auch hier dasselbe Gesetz besteht, wie bei den Gleichungen von gleich hohem Grade. Die Anzahl der fremdartigen Lösungen der Resultante lässt sich dann durch folgende Reihe angeben:

$2\,(m-2)\,(n-2)+4\,(m-3)\,(n-3)+10\,(m-4)\,(n-4)+$
$24\,(m-5)\,(n-5)\;\ldots\ldots\ldots\ldots$

Die Coefficienten sind wieder recurrirend nach der Formel

$$u_n = 2\,u_{n-1} + u_{n-2}$$

gebildet.

b. Beschaffenheit der fremdartigen Lösungen.

Wir wollen ein allgemeines Bildungsgesetz abzuleiten suchen, wonach die Ausdrücke

$$A_2^{II},\; A_3^{III},\; A_4^{IV}\;\ldots\ldots$$

zu bilden sind.

Die erste Zeile der Determinante wird gebildet durch die Elemente

$$(1,0)\;(2,0)\;(3,0)\;\ldots\ldots\;(n,0),$$

dann folgen die Elemente

$$A_{n+1}.B_0,\; A_{n+2}.B_0,\; A_{n+3}.B_0\;\ldots\ldots$$

Der Ausdruck A mit dem entsprechendem Index gibt den Grad der Determinante an, also auch wieviel Elemente hintereinander zu schreiben sind. Die 2te Zeile wird gebildet durch die Elemente

$$B_0\;B_1\;B_2\;B_3\;\ldots\ldots B_n\;0\;0\;0\;\ldots\ldots$$

Ist man bis zum Element B_n gekommen, so ersetzt man die noch folgenden Elemente durch 0. Die 3te Zeile beginnt mit 0, dann folgen die Elemente der 2ten Zeile. Das 1te und 2te Element der 4ten Zeile sind durch 0 gebildet, worauf dann wieder die Elemente

$$B_0\;B_1\;B_2\;B_3\;\ldots\ldots B_n\;0\;0\;0\;\ldots\ldots$$

folgen. In den folgenden Zeilen tritt immer 1 Element mehr mit 0 auf.

Die Bildung der Ausdrücke

$$B_6^{II},\; B_8^{II},\; B_{10}^{II}\;\ldots\ldots$$

ist analog.

Ich, August Dickmann, Sohn des Kaufmanns Theodor Dickmann, katholischer Confession, wurde geboren am 8. Januar 1854 zu Bottrop, Provinz Westfalen. Die Gymnasialbildung erhielt ich an dem Progymnasium zu Dorsten a. d. Lippe und an dem Königl. Gymnasium zu Coesfeld. Von der letztgenannten Anstalt wurde ich am 20. Juli 1875 mit dem Zeugniss der Reife entlassen. Sodann studirte ich 4 Semester hindurch an der Academie zu Münster i. W. Mathematik und Naturwissenschaften und hörte dort die Herren Professoren und Docenten: Bachmann, Hagemann, Heis, Hittorf, Hosius, Karsch, Landois, Rospatt, Spicker. Vom Herbste des Jahres 1877 an studire ich an der Universität zu Marburg und besuchte hier die Vorlesungen der Herren Professoren und Docenten: Bergmann, von Drach, Feussner, Greeff, Hess, von Koenen, Melde, Stegmann, Wigand, Zinke.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern fühle ich mich zu hohem Danke verpflichtet.